

Résolution d'un problème inverse de convection-diffusion par une méthode de perturbation singulière

Philippe Ben-Abdallah *, Hamou Sadat, Vital Le Dez

Laboratoire d'études thermiques ENSMA-UMR CNRS 6608, 86960 Futuroscope, Poitiers, France

(Reçu le 11 octobre 1998, accepté le 13 décembre 1999)

Résumé — Le but de ce travail est de résoudre un problème inverse de convection diffusion pour un écoulement de fluide newtonien incompressible entre deux plaques planes lorsque le régime dynamique est atteint. Une méthode de perturbation associée à un problème de minimisation sous contraintes permet de s'affranchir de tout processus de régularisation et de retrouver un flux pariétal inconnu à partir de données collectées à l'intérieur du fluide. Deux exemples numériques prouvent l'efficacité de l'approche proposée. © 2000 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

problème inverse / perturbation singulière / convection / diffusion / quasi-solution

Abstract — **Asymptotic approach to solve an inverse convective and diffusive problem.** The aim of this work is to solve an inverse boundary convective and diffusive problem. A flow of an incompressible Newtonian fluid between two plane slabs, when the dynamical regime is established, is considered. In order to retrieve an unknown parietal flux from measurements collected within a channel, an asymptotic technique coupled with a constraint optimisation method is developed to avoid the regularisation process. Two numerical examples are given to show the efficiency of this approach. © 2000 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

inverse problem / singular perturbation / convection / diffusion / quasi-solution

Nomenclature

u	vitesse du fluide	$m \cdot s^{-1}$	V_C	ensemble des fonctions à variation bornée	
T	température		R_n	erreur de troncature à l'ordre n	
α	diffusivité	$m^2 \cdot s^{-1}$	g	densité de probabilité du bruit	
U_{\max}	vitesse maximale	$m \cdot s^{-1}$	$z^{(k)}$	vecteur à l'itération k	
f, q, q_δ	flux de chaleur	$W \cdot m^{-2}$	z	vecteur	
λ	conductivité du fluide	$W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$	f_k, ψ_k	fonctions de bases	
H	épaisseur du canal	m	x, y	coordonnées d'un point dans le canal	m
ω	fréquence	m^{-1}	$f^{(k)}$	dérivée k ième de f	
β	longueur caractéristique	m^{-1}	\mathcal{U}	ensemble de fonctions physiquement admissibles	
ε	paramètre de perturbation		A_h	matrice	
ϕ	fonctionnelle convexe = $\ A_h z - q\ ^2$		a_{ij}	composante de A_h	
Δx	pas de discrétisation spatiale		$[0, X]$	intervalle sur lequel la solution est recherchée	
f_δ	solution approchée du problème inverse		$L^2(I)$	fonctions de carré sommable sur I	
q_δ	mesure bruitée		J, I, i, j, k	entiers	
δ	incertitude sur les mesures		z_j	composante j du vecteur z	
			\widehat{V}_C	polyèdre dans R^J	
			T_k	k ième sommet de \widehat{V}_C	
			$T_k^{(i)}$	i ième composante de T_k	
			θ_i	nombre aléatoire	
			E, σ	moyenne et variance du bruit	

* Correspondance et tirés à part.
 phil@let.ensma.fr

$H_0^2(I)$ fonctions de L^2 nulles au bord et à dérivée dans L^2

1. INTRODUCTION

Depuis la fin du siècle dernier, l'analyse des transferts de chaleur au sein des écoulements en canaux a suscité le plus vif intérêt au sein la communauté scientifique pour son importance fondamentale dans l'analyse et la conception des échangeurs de chaleur. Le problème de Graetz [1, 2], qui consiste à étudier les écoulements laminaires incompressibles dans un tube lorsque le régime dynamique est atteint est à la base de l'analyse moderne de ces problèmes. Il a été résolu analytiquement il y a maintenant plus d'un siècle par une méthode de décomposition spectrale et, pendant les soixante dix ans qui ont suivi, les recherches sur ce problème se sont essentiellement limitées à la détermination de ses valeurs propres [3–5]. Récemment, l'émergence de la technologie des micros structures (micro échangeurs...) a conduit à un regain d'intérêt pour ce problème tant sur le plan expérimental [6, 7], que numérique [8]. La compréhension et le contrôle des phénomènes de convection diffusion dans un canal constituent encore à ce jour un enjeu scientifique et technologique indéniable.

Alors que la résolution du problème direct, c'est-à-dire le calcul des champs de vitesse et de température au sein de l'écoulement à partir de conditions aux limites imposées, a acquis une maturité certaine, le problème inverse qui lui est associé a encore été très peu abordé à ce jour. C'est à Keller et Cebeci [9] que l'on doit l'une des premières études d'un problème inverse en convection. Cependant, le comportement intrinsèquement mal posé du problème examiné a été complètement occulté et seules des mesures exactes issues du model direct ont été utilisées pour sa résolution. En dépit des nombreuses études relatives aux problèmes inverses en conduction, la notion de problème mal posé demeurait encore floue dans bien des esprits comme en témoigne la phrase suivante de Cebeci [10] : «... *such a procedure* (celle suivie par Keller puis par lui) *is necessary because a slight error in the experimental measurements will affect the computed velocity distribution* ». C'est seulement en 1989 que cette instabilité a été clairement décrite et traitée [11] lors de la résolution d'un problème inverse de convection libre.

De nombreuses méthodes ont été proposées pour résoudre les problèmes mal posés en physique. Une des premières techniques qui est à la base de l'analyse moderne des problèmes inverses a été proposée par Tikhonov et Arsenin [12]. Un terme de lissage est introduit

pour réduire l'influence des erreurs de mesure. L'intensité de ce lissage est fixée par une variable de pondération appelée paramètre de régularisation dont la valeur dépend directement de l'amplitude des erreurs de mesure [12, 13]. En 1985 Beck [14] mis en place une méthode hybride de régularisation qui associe la technique de régularisation de Tikhonov à une recherche séquentielle de la solution. Plus récemment Murio [15] développa une méthode de filtrage basée sur l'élimination des fréquences déstabilisatrice (les hautes fréquences) par la convolution des mesures avec une fonction lisse (suffisamment régulière) à décroissance rapide. Ces techniques ont été abondamment utilisées en thermique notamment pour la résolution de problèmes inverses en conduction multidimensionnelle linéaire et non linéaire [16, 17]. Cependant toutes ces méthodes sont basées sur une modélisation complète du problème direct ce qui les rend parfois difficiles à utiliser lors de l'analyse de systèmes thermiques complexes.

Dans ce travail, on se propose d'évaluer un flux pariétal inconnu sur une surface d'un canal à partir de données ponctuelles collectées au sein de l'écoulement. On montre qu'il est possible de s'affranchir de tout processus de régularisation en introduisant des informations physiques de type qualitatif sur la solution recherchée. De plus, en vu d'étudier des systèmes thermiques complexes le modèle direct complet est remplacé par un modèle d'ordre réduit plus facile d'utilisation et qui permet de localiser les « zones optimales » de mesure. On supposera le fluide incompressible, le régime dynamique établi et la diffusion axiale négligeable. A cet effet, une méthode hybride d'inversion basée sur une approche asymptotique du problème de convection-diffusion associée à un problème d'optimisation sous contraintes est présentée. Dans un premier temps une relation explicite associant l'inconnu du problème au champ de température mesuré est déterminée par une analyse asymptotique du problème direct. Le caractère mal-posé du problème inverse est alors mis en évidence. On montre alors que, moyennant un choix convenable de l'espace des solutions, une quasi-solution peut être recherchée à l'aide d'une simple méthode du gradient.

Finalement, deux exemples numériques viendront prouver l'efficacité de la méthode présentée.

2. FORMULATION DU PROBLÈME DIRECT

Avant d'aborder le problème inverse, nous allons formuler le problème direct et décrire le principe de notre

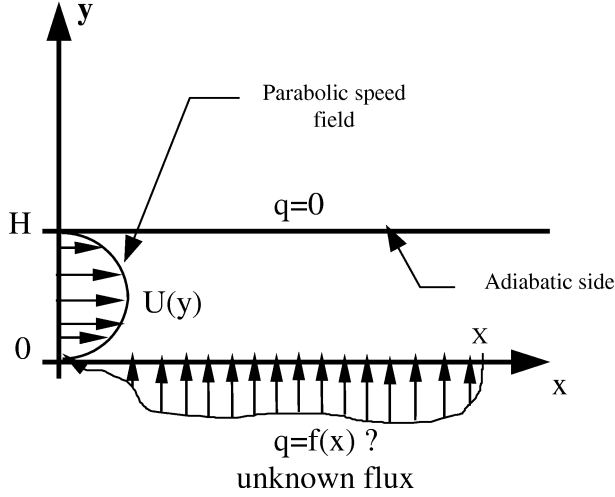


Figure 1. Configuration géométrique et caractéristiques de l'écoulement étudié.

Figure 1. Geometrical configuration and flow characteristics.

méthode de perturbation. Cette dernière nous permettra d'écrire de façon explicite l'évolution axiale du champ de température en fonction des sollicitations et donc de l'inconnue du problème. Sans restreindre la généralité de la méthode, nous nous limiterons ici au cas d'un écoulement fluide incompressible entre deux plans parallèles (figure 1). Lorsque le régime dynamique est supposé établi et que la diffusion axiale est négligée (i.e. nombre de Peclet $\gg 1$) l'équation de l'énergie s'écrit

$$u(y) \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (1)$$

où α représente la diffusivité du fluide et u son champ de vitesse. Nous examinerons dans ce travail le cas de conditions aux limites en flux imposé (conditions de Neumann), c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial y}(x, H) &= \tilde{g}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial T}{\partial y}(x, 0) &= \tilde{f}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2)$$

où \tilde{f} et \tilde{g} sont deux fonctions suffisamment régulières (par la suite la fonction \tilde{g} sera supposée identiquement nulle). Des conditions similaires à (2) se rencontrent par exemple lors de l'étude du transfert de chaleur dans les cartes de composants électroniques. Il est intéressant de noter que l'équation (1) modélise également les problèmes de conduction instationnaire, x jouant alors le rôle du temps.

Le problème direct de convection diffusion a pour but de déterminer le champ de température T régi par l'équation aux dérivées partielles (1) lorsque les conditions (2) sont imposées sur les frontières. Nous allons maintenant relier explicitement le champ solution de ce problème aux sollicitations qui lui ont donné naissance. En effectuant le changement de variable $q(x, y) = -\lambda \partial T / \partial y$ de façon à réécrire le système (1)–(2) en terme de flux, il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial q(x, y)}{\partial x} &= \alpha \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{u(y)} \frac{\partial q}{\partial y} \right) \quad \text{sur } \Omega =]0; +\infty[\times]0; H[\\ q(x, H) &= 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ q(x, 0) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (3)$$

où $f = -\lambda \tilde{f}$. On se propose maintenant de résoudre cette équation à l'aide d'une méthode de perturbation singulière [18, 19]. En substituant au système (3) le système perturbé

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial q^*(x, y)}{\partial x} &= \alpha \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{u(y)} \frac{\partial q^*}{\partial y} \right) \quad \text{sur } \Omega \\ q^*(x, H) &= 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ q^*(x, 0) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (4)$$

où ε est un paramètre réel qui sera par la suite pris égal à un, la solution de ce problème est recherchée sous forme d'un développement asymptotique

$$q^*(x, y) = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k q_k(x, y) \quad (5)$$

En injectant ce développement dans l'équation (4) puis en identifiant les coefficients de même puissance de ε nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{u(y)} \frac{\partial q_0}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial q_0}{\partial x} &= \alpha \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{u(y)} \frac{\partial q_1}{\partial y} \right) \\ &\vdots \\ \frac{\partial q_{k-1}}{\partial x} &= \alpha \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{u(y)} \frac{\partial q_k}{\partial y} \right) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (6)$$

Ce système étant linéaire il est légitime de rechercher une solution en séparant les variables d'espaces, en y insérant les relations

$$q_k(x, y) = f_k(x) \psi_k(y), \quad k = 0, \dots \quad (7)$$

Ce faisant nous sommes conduit aux deux systèmes découplés suivants

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{u} \frac{d\psi_0}{dy} \right) \\
 \psi_0 &= \alpha \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{u} \frac{d\psi_1}{dy} \right) \\
 &\vdots \\
 \psi_{k-1} &= \alpha \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{u} \frac{d\psi_k}{dy} \right) \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{8}$$

et

$$\begin{aligned}
 \frac{df_0}{dx} - f_1 &= 0 \\
 &\vdots \\
 \frac{df_{k-1}}{dx} - f_k &= 0 \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{9}$$

auxquels sont adjoints la condition d'adiabaticité à la frontière $y = H$

$f_0(x)\psi_0(H) + \varepsilon f_1(x)\psi_1(H) + \dots = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
qui implique

$$\psi_i(H) = 0 \quad \text{pour tout } i = 0, 1, \dots \tag{10}$$

ainsi que la condition en flux imposé sur le plan $y = 0$

$$\begin{aligned}
 f_0(x)\psi_0(0) + \varepsilon f_1(x)\psi_1(0) + \dots &= f(x) \\
 \text{pour tout } x \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

qui nécessite

$$\psi_0(0) = 1 \quad \text{et} \quad \psi_1(0) = \psi_2(0) = \dots = 0 \tag{11}$$

Le système (9) permet alors de relier les fonctions f_k aux dérivées successives de f . Plus précisément on a

$$\begin{aligned}
 f_0(x) &= f(x) \\
 &\vdots \\
 f_k(x) &= \frac{d^k f(x)}{dx^k} \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{12}$$

Finalement en posant $\varepsilon = 1$, la solution de l'équation (3) s'écrit

$$q(x, y) = \sum_{k \geq 0} \psi_k(y) f^{(k)}(x) \tag{13}$$

où $f^{(k)}(x)$ représente la dérivée k ème de f . Remarquons qu'aucune condition d'entrée n'a été utilisée dans la méthode que nous avons employée. En fait, la relation (13) correspond à un régime graduellement varié qui s'établit suffisamment loin de l'entrée. La validité de ce type de solution a été étudiée récemment [19]. Il est établi qu'une troncature à l'ordre deux est suffisante pour approcher convenablement la solution du problème direct. Nous verrons dans les prochains paragraphes comment exploiter ce résultat de convergence dans le cadre du problème inverse. La résolution du système d'équations (8) permet ainsi de déterminer aisément les fonctions ψ_k pour différents profils de vitesse. Dans le cas d'un profil de vitesse parabolique

$$u(y) = 4U_{\max} \frac{y}{H} \left(1 - \frac{y}{H} \right) \tag{14}$$

les trois premières fonctions ψ_k sont données par

$$\begin{aligned}
 \psi_0(y) &= -\frac{6}{H^2} y^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{3H} \right) + 1 \\
 \psi_1(y) &= -\frac{U_{\max}}{\alpha H^3} \left(\frac{2y^7}{7H} - \frac{y^6}{H} + \frac{4}{5} y^5 + y^4 H \right. \\
 &\quad \left. - \frac{64}{35} y^3 H^2 + \frac{26}{35} y^2 H^3 \right) \\
 \psi_2(y) &= \frac{U_{\max}^2}{\alpha^2 H^4} \left(\frac{y^{11}}{77H^3} - \frac{y^{10}}{14H^2} + \frac{116y^9}{945H} + \frac{y^8}{30} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{92}{245} y^7 H + \frac{148}{315} y^6 H^2 - \frac{104}{525} y^5 H^3 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{4454}{363825} y^3 H^5 + \frac{2227}{121275} y^2 H^6 \right)
 \end{aligned} \tag{15}$$

où U_{\max} représente la vitesse maximale dans le canal.

3. RÉOLUTION DU PROBLÈME INVERSE

Le problème inverse est typiquement un problème de contrôle qui peut être formellement défini de la manière suivante : *Choisir la condition aux limites f sur un certain ensemble de fonctions physiquement admissibles \mathcal{U} de sorte que la mesure q au sein du canal corresponde à cette sollicitation.*

En pratique un certain nombre de difficultés viennent inévitablement compliquer sa résolution. En effet, à la place de la fonction q on ne dispose généralement que d'un ensemble fini de mesures q_j . La stratégie à utiliser pour effectuer au mieux cet échantillonnage constitue d'ailleurs un problème délicat. De plus comme dans

tous les processus de mesure physique, un bruit vient entacher ces données de sorte qu'en pratique ne peut être utilisé qu'un ensemble fini de mesures approximatives. Il convient à partir de ces informations d'approcher au mieux la solution exacte du problème inverse, c'est-à-dire la solution qui serait obtenue sans ces artefacts expérimentaux. Il se pose également la question du choix de \mathcal{U} . C'est évidemment la physique du problème qui suggère ce choix. Dans le cadre de cette étude,

la sollicitation recherchée correspond à un signal d'énergie finie sur un domaine borné $[0, X]$, de sorte qu'il est légitime de rechercher la solution du problème inverse dans l'espace $L^2([0, X])$ des fonctions de carré sommable sur cet intervalle. De façon à cibler davantage la recherche de la solution du problème inverse, on peut introduire d'autres contraintes dès lors que celles-ci demeurent compatibles avec la physique du problème (fonctions convexes, positives...).

3.1. Caractère mal-posé et principes de résolution

Considérons un réseau de points $\{x_j\}_{j=1, \overline{J}}$ uniformément répartis sur l'intervalle $I = [0 = x_1, X = x_J]$ sur lequel va être recherché la solution du problème inverse. En discrétisant les dérivées premières et secondes de l'inconnue f à l'aide des schémas aux différences finies suivants

$$\begin{aligned}
 \frac{df(x_j)}{dx} &= \frac{f_{j+1} - f_j}{\Delta x} + o(\Delta x) & \text{si } j = 1 \\
 \frac{df(x_j)}{dx} &= \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2\Delta x} + o(\Delta x^2) & \text{si } j = \overline{2, J-1} \\
 \frac{df(x_j)}{dx} &= \frac{f_j - f_{j-1}}{\Delta x} + o(\Delta x) & \text{si } j = J \\
 \frac{d^2f(x_j)}{dx^2} &= \frac{f_{j+2} - 2f_{j+1} + f_j}{\Delta x^2} + o(\Delta x) & \text{si } j = 1 \\
 \frac{d^2f(x_j)}{dx^2} &= \frac{f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}}{\Delta x^2} + o(\Delta x^2) & \text{si } j = \overline{2, J-1} \\
 \frac{d^2f(x_j)}{dx^2} &= \frac{f_{j-2} - 2f_{j-1} + f_j}{\Delta x^2} + o(\Delta x) & \text{si } j = J
 \end{aligned} \tag{16}$$

et en injectant ces relations dans la série (13) tronquée à l'ordre deux il vient

$$q(x_j, y) = \sum_{k=1}^J a_{jk}(y) f(x_k), \quad j = \overline{1, J} \text{ et } y \in [0, H] \tag{17}$$

Cette égalité relie algébriquement les mesures exactes q_j aux inconnues du problème f_k . Compte tenu des schémas utilisés, la matrice A_h de ce système s'exprime sous la forme

$$A_h = \begin{pmatrix} \psi_0 - \frac{\psi_1}{\Delta x} + \frac{\psi_2}{\Delta x^2} & \frac{\psi_1}{\Delta x} - 2\frac{\psi_2}{\Delta x^2} & \frac{\psi_2}{\Delta x^2} & 0 & \cdot & 0 \\ \frac{\psi_2}{\Delta x^2} - \frac{\psi_1}{2\Delta x} & \psi_0 - 2\frac{\psi_2}{\Delta x^2} & \frac{\psi_1}{2\Delta x} + \frac{\psi_2}{\Delta x^2} & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & \frac{\psi_2}{\Delta x^2} - \frac{\psi_1}{2\Delta x} & \psi_0 - 2\frac{\psi_2}{\Delta x^2} & \frac{\psi_1}{2\Delta x} + \frac{\psi_2}{\Delta x^2} \\ 0 & \cdot & 0 & \frac{\psi_2}{\Delta x^2} & -\frac{\psi_1}{\Delta x} - 2\frac{\psi_2}{\Delta x^2} & \psi_0 + \frac{\psi_1}{\Delta x} + \frac{\psi_2}{\Delta x^2} \end{pmatrix} \tag{18}$$

On vérifie sur la *figure 2* que lorsque les mesures sont collectées dans le fluide cette matrice est très mal conditionnée (en revanche, en $y = 0$ le nombre de conditionnement de A_h est égal à un). En présence de bruit la résolution du système (19) conduit généralement à des solutions très différentes de la solution exacte si aucune précaution particulière n'est prise. Pour pallier à cette difficulté, nous allons introduire une contrainte supplémentaire de façon à transformer ce problème mal-posé en un problème stable vis à vis des perturbations sur les mesures et ainsi s'affranchir de tout procédés de régularisation. Compte tenu de sa signification physique (il s'agit d'un flux) la fonction f est continue et à variation bornée sur l'intervalle $[0, X]$. Or il est possible de montrer [13] que l'ensemble V_C des fonctions à variation bornée sur $[0, X]$ constitue un sous ensemble compact de $L^2([0, X])$ de sorte que la résolution du système algébrique (18) constitue un problème bien posé [12] sur cet ensemble. Il suffit alors [13, 21] de considérer la fonctionnelle

$$\phi(z) = \|A_h z - q\|^2 \quad (19)$$

et de résoudre le problème d'optimisation suivant

$$\begin{aligned} &\text{trouver } f_\delta \in V_C \quad \text{tel que} \\ &\|A_h f_\delta - q_\delta\|^2 = \underset{z \in V_C}{\text{Min}} \phi(z) \end{aligned} \quad (20)$$

où q_δ représente une mesure bruitée, A_h étant la matrice définie en (18). Nous avons résolu ce problème d'optimisation à l'aide de la méthode du gradient conditionnel [20].

3.2. Algorithme de résolution du problème inverse

Le principe de la méthode repose sur l'idée suivante. Puisque le problème (17) est stable sur V_C , il suffit de parcourir cet ensemble pour rechercher une solution approchée f_δ du problème (20). D'un point de vue pratique il suffit de minimiser la fonctionnelle ϕ jusqu'à ce qu'elle atteigne une valeur inférieure à la valeur δ^2 qui vérifie l'inégalité $\|A f_\delta - q_\delta\| \leq \delta$. Pour cela on construit une suite de vecteurs $z^{(k)} \in \mathbb{R}^J$ qui minimise $\phi(z)$ sur l'ensemble V_C des vecteurs $z \in \mathbb{R}^J$ dont les composantes satisfont à l'inégalité

$$|z_2 - z_1| + |z_3 - z_2| + \dots + |z_J - z_{J-1}| \leq C \quad (21)$$

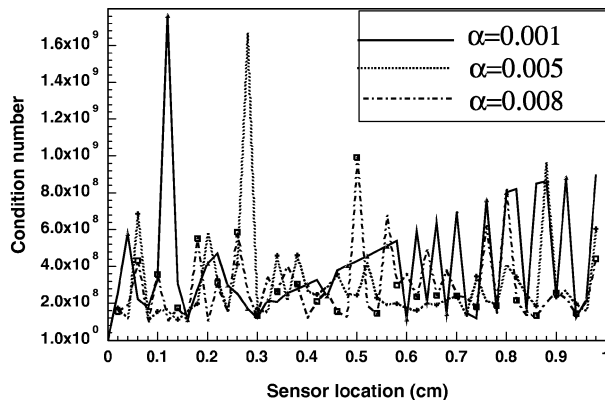


Figure 2. Mise en évidence du caractère mal-posé du problème inverse.

Figure 2. Ill-posed nature of the inverse problem.

En pratique, la constante C peut-être évaluée à partir d'un majorant de la fonction inconnue z . Dans la suite de ce travail nous supposons que l'une des valeurs $z(0)$ ou $z(X)$ prise par la solution aux extrémités est connue. Sans restreindre la généralité du problème, posons $z(X) = 0$ de sorte que $z_J = 0$. Le problème numérique que l'on doit résoudre consiste alors à rechercher dans V_C un vecteur dont les composantes vérifient

$$\begin{aligned} |z_2 - z_1| + |z_3 - z_2| + \dots + |z_J - z_{J-1}| &\leq C \\ z_J &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

et qui est solution de (20). Ce sous-ensemble \widehat{V}_C de V_C est un polyèdre convexe dans \mathbb{R}^{J-1} [21] avec $2(J-1)$ sommets qui s'expriment sous la forme

$$\begin{aligned} T_k^{(i)} &= \begin{cases} C, & k \leq i, \\ 0, & k > i, \end{cases} \quad i = 1, \dots, J-1 \\ T^{(-i)} &= -T^{(i)}, \quad i = 1, \dots, J-1 \end{aligned} \quad (23)$$

Il s'agit de construire parallèlement à la séquence $z^{(k)}$ qui minimise la fonctionnelle ϕ sur le polyèdre \widehat{V}_C , une suite auxiliaire $\bar{z}^{(k)}$ de la manière suivante. En choisissant un point admissible $z^{(0)} \in \widehat{V}_C$ et faisant l'hypothèse que $z^{(k)}$ ait été construit, $\bar{z}^{(k)}$ (*figure 3*) est alors solution du problème

$$(\phi'(z^{(k)}), \bar{z}^{(k)}) = \underset{z \in \widehat{V}_C}{\text{Min}} (\phi'(z^{(k)}), z) \quad (24)$$

ou le symbole prime désigne le gradient de la fonction. Ce problème de programmation linéaire se résout aisément par la méthode des simplexes [20]. Celle-ci revient

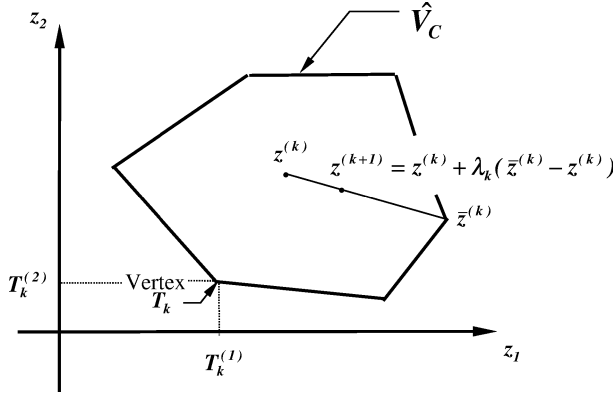


Figure 3. Représentation géométrique de l'algorithme du gradient conditionnel.

Figure 3. Geometrical interpretation of the conditional gradient algorithm.

à parcourir tous les sommets du polyèdre \widehat{V}_C jusqu'à ce que l'on trouve le sommet qui minimise le produit scalaire indiqué en (24). Lorsque ce problème est résolu, le vecteur $z^{(k+1)}$ est construit à partir de l'itération précédente $z^{(k)}$ grâce à la relation

$$z^{(k+1)} = z^{(k)} + \lambda_k(\bar{z}^{(k)} - z^{(k)}) \quad (25)$$

où $\lambda_k \in [0, 1]$ est solution du problème d'optimisation mono-dimensionnel suivant

$$\begin{aligned} \phi(z^{(k+1)}) &= \phi(z^{(k)} + \lambda_k(\bar{z}^{(k)} - z^{(k)})) \\ &= \text{Min}_{\lambda \in [0,1]} \phi(z^{(k)} + \lambda(\bar{z}^{(k)} - z^{(k)})) \end{aligned} \quad (26)$$

Ceci revient tout simplement à minimiser $\phi(z)$ sur le segment $[z^{(k)}, \bar{z}^{(k)}]$.

4. APPLICATIONS NUMÉRIQUES

4.1. Erreur de troncature

Dans la méthode d'inversion décrite plus haut, une troncature de la série (13) a été effectuée. Dans ce paragraphe, nous allons montrer que lorsque le milieu est soumis à une sollicitation harmonique $f(x) = e^{i\omega x}$, un très petit nombre de fonctions ψ_k est suffisant pour représenter précisément le flux interne. Autrement dit, nous allons vérifier que la troncature induit un très faible biais sur les mesures.

Afin d'estimer un majorant du reste R_n de la série (13) tronquée à un ordre n nous allons au préalable réduire les équations du système récursif (8) à leur formulation

faible. Etant donné l'ensemble $V = \{v/v \in H_0^1([0; H])\}$, il est facile de voir par simple intégration que l'équation

$$\psi_{k-1} = \alpha \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{u(y)} \frac{d\psi_k}{dy} \right) \quad \text{sur }]0; H[\quad \forall k = 2, 3, \dots \quad (27)$$

$$\psi_k(0) = \psi_k(H) = 0$$

est équivalente à

$$a(\psi_k, v) = l(v) \quad \forall k = 2, 3, \dots \text{ et } \forall v \in \mathcal{V} \quad (28)$$

avec

$$a(\psi_k, v) = \alpha \int_0^H \frac{1}{u(y)} \frac{d\psi_k}{dy} \frac{dv}{dy} dy \quad \text{et} \quad (29)$$

$$l_k(v) = - \int_0^H \psi_{k-1} v dy$$

Pour une sollicitation harmonique on a évidemment $R_n = \sum_{p \geq n} \psi_p \omega^p e^{i\omega x}$.

Comme on a la minoration

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \int_0^H \frac{\alpha}{u} \left(\frac{dv}{dy} \right)^2 dy \\ &\geq \frac{\alpha}{U_{\max}} \int_0^H \left(\frac{dv}{dy} \right)^2 dy = \frac{\alpha}{U_{\max}} \left\| \frac{dv}{dy} \right\|_{L^2([0; H])}^2 \end{aligned} \quad (30)$$

et que l'inégalité de Poincaré [23] impose

$$\|v\|_{L^2([0; H])} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} H \left\| \frac{dv}{dy} \right\|_{L^2([0; H])} \quad (31)$$

alors

$$a(v, v) \geq \frac{2\alpha}{H^2 U_{\max}} \|v\|_{L^2([0; H])}^2 \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad (32)$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} a(\psi_k, v) = l_k(v) &\leq \left| \int_0^H \psi_{k-1} v dy \right| \\ &\leq \|\psi_{k-1}\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \quad \forall v \in \mathcal{V} \end{aligned} \quad (33)$$

Finalement en posant $v = \psi_k$ dans les inégalités (32) et (33) et en simplifiant par $\|\psi_k\|_{L^2}$ on obtient la relation suivante entre deux fonctions de base successives :

$$\frac{2\alpha}{H^2 U_{\max}} \|\psi_k\|_{L^2} \leq \|\psi_{k-1}\|_{L^2} \quad \forall k = 2, 3, \dots \quad (34)$$

Le reste de la série (13) vérifie alors :

$$\|R_n\|_{L^2} \leq \sum_{p \geq n} \|\psi_p\|_{L^2} \omega^p \leq \|\psi_n\|_{L^2} \sum_{p \geq n} \omega^p \beta^p \quad (35)$$

où $\beta = H^2 U_{\max} / (2\alpha)$. Lorsque cette série est convergente (i.e. $\omega\beta < 1$), l'erreur de troncature de la méthode asymptotique admet la majoration suivante :

$$\|R_n\|_{L^2} \leq \frac{(\omega\beta)^n}{1 - \omega\beta} \|\psi_0\|_{L^2} \quad (36)$$

On peut remarquer que la constante β est homogène à une longueur. Lorsque la fréquence ω de la sollicitation est supérieure à l'inverse de cette longueur alors la série (13) est divergente. Ceci a comme conséquence de limiter la méthode aux milieux graduellement sollicités. Autrement dit, en toute rigueur, la méthode de perturbation n'est utilisable que pour des sollicitations suffisamment régulières. Néanmoins, ceci ne constitue pas vraiment un handicap pour traiter le problème inverse. En effet celui-ci consiste généralement à filtrer les hautes fréquences déstabilisatrices des mesures donc à les lisser. Dans le travail qui est présenté ici, la troncature de la série est donc toujours à l'origine d'un biais sur les mesures. Ce biais apparaît d'ailleurs sur les simulations numériques (figures 5 et 6) lorsque l'amplitude du bruit tend vers zéro. D'un point de vu pratique (sollicitation graduelle quelconque) il a été constaté [19] que, compte tenu de la vitesse de convergence de la série (13), il est généralement suffisant de réduire la troncature à l'ordre deux.

4.2. Caractérisation du bruit de mesure

Pour simuler le processus d'apparition d'erreurs accidentelles pendant les mesures des flux de chaleur $q(x, y)$ le long de l'axe du canal, les valeurs exactes sont perturbées par un bruit gaussien. Ceci revient à remplacer q par une approximation q_δ calculée à partir de l'égalité

$$q_\delta(x_i, y) = q(x_i, y)(1 + \theta_i) \quad \forall y \in [0, H] \quad (37)$$

où les θ_i sont des nombres aléatoires obéissant à une loi de distribution gaussienne g contenus dans l'intervalle $[-1, 1]$. Comme tout processus gaussien, ce bruit est entièrement défini par ses caractéristiques statistiques du premier et du second ordre, respectivement sa moyenne $E(\theta)$ et sa variance σ^2 . Dans le cadre de cette étude, la moyenne est prise égale à zéro (il n'y a pas de biais sur les mesures), la variance (fonction de l'amplitude du bruit) est par définition confondue à l'erreur quadratique $\|q - q_\delta\|^2$ tandis que la densité de probabilité du bruit est donnée par la relation suivante :

$$g(\theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\theta^2}{2\sigma^2}\right) \quad (38)$$

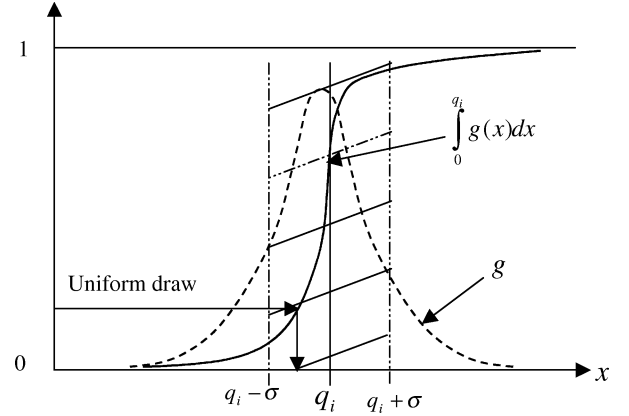


Figure 4. Principe de génération d'un bruit gaussien par la méthode de transformation.

Figure 4. Principle of Gaussian random generation from the transformation method.

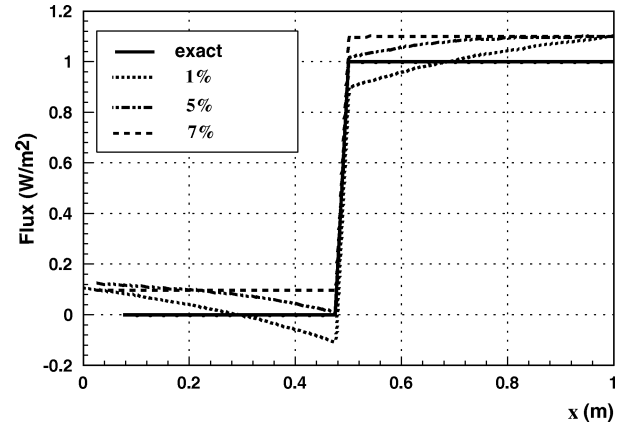


Figure 5. Restitution d'un flux échelon à partir de mesures bruitées par une réalisation gaussienne et collectées au centre du canal.

Figure 5. Retrieval of a step flux with measurements noised by a single Gaussian realisation and collected along the canal axis.

Pour générer numériquement ce bruit la méthode dite de transformation [22], dont le principe est illustré sur la figure 4, est utilisée.

4.3. Influence du bruit de mesure sur la restitution

Nous présentons sur les figures 5 et 6 la restitution de différents flux inconnus sur la paroi dans le domaine $[0, 1]$ à partir de 40 points de mesure effectués au centre d'un canal de hauteur $H = 1$ cm et répartis uniformément le long de son axe sur une distance d'un mètre.

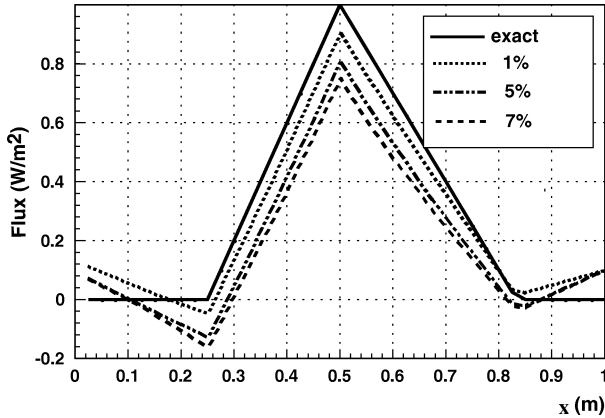


Figure 6. Restitution d'un flux triangulaire à partir de mesures bruitées par une réalisation gaussienne et collectées au centre du canal.

Figure 6. Retrieval of a triangular flux with measurements noised by a single Gaussian realisation and collected along the canal axis.

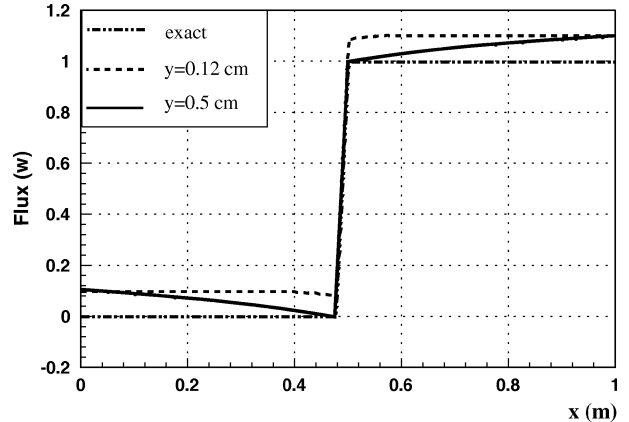


Figure 7. Restitution d'un échelon pour des mesures collectées à deux altitudes différentes avec 3% de bruit (simulation effectuée pour une réalisation du bruit).

Figure 7. Retrieval of a step flux with measurements collected at two different heights with a 3% noise (simulation carried out with one realisation of noise).

Comme solution initiale du processus d'itération, nous avons choisi une fonction identiquement égale à un. Ces restitutions ont été réalisées pour un fluide de diffusivité thermique $\alpha = 0,001 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ et pour une vitesse maximale $u_{\max} = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (i.e. $\beta = 0,05$). On constate que l'erreur quadratique qui mesure la convergence uniforme augmente avec le niveau de bruit tandis que l'erreur relative n'excède pas dix pour cent. Notons cependant que l'algorithme proposé peut conduire localement, dans certain cas, à des flux de chaleur inversés (*figures 5 et 6*). Ce type de « paradoxe » serait évidemment levé par l'adjonction d'une contrainte supplémentaire [13, 21] pour imposer le signe de la solution recherchée (le flux est strictement positif) et donc affiner l'espace des solutions \mathcal{U} .

4.4. Influence de la position des détecteurs

Contrairement à ce que l'intuition suggère, lorsqu'on éloigne les détecteurs de la condition aux limites inconnue, la restitution de l'excitation n'est pas nécessairement moins bonne. En effet on constate qu'à $y = 0,5 \text{ cm}$ le profil de flux restitué par notre algorithme d'inversion est plus « proche » du profil exact que celui obtenu à l'aide de mesures effectuées à la cote $y = 0,12 \text{ cm}$. Ce résultat à priori surprenant s'explique aisément par l'analyse du conditionnement des systèmes algébriques (*figure 2*). On constate en effet la présence d'un pic situé à $y = 0,12 \text{ cm}$. En ce point le système a donc tendance à amplifier le bruit d'avantage que partout ailleurs dans le canal (*figure 7*).

5. CONCLUSION

Compte tenu des nombreuses applications pratiques dont il fait l'objet, le problème direct de convection diffusion a donné lieu à une abondante littérature. Dans ce travail, nous nous sommes intéressés au problème inverse. Une condition aux limites inconnue a été évaluée à l'aide de données collectées localement au sein de l'écoulement. Pour ce faire une technique hybride qui associe une méthode de perturbation singulière à une méthode d'optimisation sous contrainte a été développée. Nous avons montré que l'introduction d'une information de type qualitatif sur la solution recherchée (fonction à variation bornée) permettait de s'affranchir de tout processus de régularisation. De plus, la méthode développée présente l'avantage de substituer au modèle direct complet un modèle d'ordre réduit dont la mise en œuvre est beaucoup plus facile et permet d'envisager l'étude des systèmes thermiques complexes. Enfin, l'approche asymptotique du problème a permis d'identifier les zones à privilégier (les moins sensibles au bruit) pour la collecte des mesures sans avoir à effectuer le calcul de la matrice de sensibilité du problème.

Il est important de souligner la généralité de l'approche proposée. La méthode de perturbation singulière utilisée dans ce travail ne se limite pas aux problèmes de convection diffusion et bon nombre de problèmes d'évolution peuvent être étudiés à partir de cette méthode. Citons en particulier le délicat problème de conduction instationnaire en milieu hétérogène pour lequel les méthodes classiques conduisent à un problème de Sturm–Liouville

très difficile à résoudre en raison des discontinuités au sein du milieu. Or dans le cadre de la méthode que nous avons développée sa résolution ne présente pas de difficultés nouvelles par rapport au cas homogène, les fonctions de base étant toujours continues et ce malgré la présence de discontinuités dans les propriétés thermophysiques.

Toutefois, la méthode que nous avons développée présente un certain nombre d'inconvénients qu'il est important de rappeler. Avant tout, elle génère un biais systématique sur les mesures. Ce biais dépend étroitement de l'ordre de troncature adopté et des caractéristiques de l'écoulement. Il vient appauvrir les informations collectées par l'expérimentateur et s'ajoute au bruit de mesure. Le deuxième aspect concerne la limitation de la méthode aux milieux soumis à des sollicitations régulières c'est-à-dire à des fonctions dont les hautes harmoniques sont négligeables. Néanmoins, malgré ces deux handicaps, nous avons démontré qu'une troncature à l'ordre deux permettait de reconstruire avec une bonne précision les sollicitations inconnues et ce malgré la présence du biais induit par la troncature et par celle du bruit de mesure.

RÉFÉRENCES

- [1] Graetz L., Über die Wärmeleitungsfähigkeit von Flüssigkeiten, Part 1, *Annalen der Physik und Chemie* 18 (1883) 79-94.
- [2] Graetz L., Über die Wärmeleitungsfähigkeit von Flüssigkeiten, Part 2, *Annalen der Physik und Chemie* 25 (1885) 337-357.
- [3] Tribus M., Klein J.S., Forced convection from non-isothermal surfaces, in: *Heat Transfer Symposium*, 1953, pp. 211-235.
- [4] Abramowitz M., On solution of differential equation occurring in problem of heat convection laminar flow in tube, *Journal of Mathematics and Physics* 32 (1953) 184-187.
- [5] Stellars J.R., Tribus M., Klein J.S., Heat transfer to laminar flow in a round tube of flat conduit: The Graetz problem extended, *Trans. ASME* 78 (1956) 441-448.
- [6] Pfahler J., Harley J., Bau H.H., Zemel J., Liquid and gas transport in small channels, *Proceedings of ASME WAM Micro Structures, Sensors and Actuators DSC* 19 (1990) 149-157.
- [7] Peterson G.P., Duncan A.B., Weichold M.H., Experimental investigation of micro heat pipes fabricated in silicon wafer, *ASME J. Heat Tran.* 115 (1993) 751-775.
- [8] Barron R.F., Wang X., Ameal T.A., Warrington R.O., The Graetz problem extended to slip-flow, *Int. J. Heat Mass Tran.* 4 (1997) 8.
- [9] Keller H.B., Cebeci T., An inverse problem in boundary layer flows: numerical determination of pressure gradient for a given wall shear, *J. Comput. Phys.* 10 (1972) 151-161.
- [10] Cebeci T., An inverse boundary layer method for compressible laminar and turbulent boundary layers, *J. of Aircraft* 13 (9) (1976) 709-717.
- [11] Moutsoglou A., An inverse convection problem, *ASME J. Heat Tran.* 111 (1) (1989) 37-43.
- [12] Tikhonov A.N., Arsenin V.Y., *Solutions of Ill-posed Problems*, Wiley, New York, 1977.
- [13] Bakushinsky A., Goncharsky A., *Ill-posed Problems: Theory and Applications*, Kluwer Academic, 1994.
- [14] Beck J., Blackwell B., StClair C., *Inverse Heat Conduction Ill-posed Problems*, Wiley, New York, 1985.
- [15] Murio D., *The Mollification Method and the Numerical Solution of Ill-posed Problems*, Wiley, New York, 1993.
- [16] Jarny Y., Ozisik N., Bardon J.P., A general optimization method using adjoint equation for solving multidimensional inverse heat conduction, *Int. J. Heat Mass Tran.* 34 (11) (1991) 2911-1919.
- [17] Raynaud M., Bransier J., A new finite difference method for the non-linear inverse heat conduction problem, *Numer. Heat Tran.* 9 (1) (1986) 27-42.
- [18] Ben-Abdallah P., Sadat H., Application d'une méthode de perturbation au problème inverse de conduction de la chaleur, *C.R. Acad. Sci. Paris Série IIb* 325 (1997) 473-479.
- [19] El Othmani A., Contribution à la modélisation réduite des transferts conjugués dans les canaux, Thèse, Université de Poitiers, 1996.
- [20] Ciarlet P.G., *Introduction à l'analyse numérique et à l'optimisation*, Masson, Paris, 1990.
- [21] Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P., *Theory of Linear Ill-posed Problem and Its Applications*, Nauka, Moscow, 1978.
- [22] Devroye L., *Nonuniform Random Variate Generation*, Springer Verlag, New York, 1986.
- [23] Brezis H., *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*, Masson, Paris, 1992.

Abridged English version

Asymptotic approach to solve an inverse convective and diffusive problem

By the end of the last century, the problem of forced convection transfer in ducts gained interest because of its

fundamental importance in practical problems such as the analysis and design of heat exchangers. The Graetz prob-

lem [1–5] which consists in studying the forced convection heat transfer of an incompressible fluid for laminar flow is at the base of modern analysis of such studies. Recently, applications of micro structures such as micro heat exchangers have led to increased interest in convection heat transfer in microgeometries [6–8] and the Graetz problem is still an important subject of investigations. In this area, the inverse convection problem has received little attention. The latter consists in estimating boundary conditions or thermal properties through the use of remote temperature or flux measurements. The pioneering work on this topic is due to Keller [9]. However, in all his study, the ill-posed nature of this problem has been fully occulted. It was only in 1989 that Moustsoglou [11] highlighted the ill-posed nature of the inverse convective problem.

Numerous methods have been proposed to solve the inverse problems in physics. Tikhonov and Arsenin [12, 13] proposed the regularisation technique. It provides the stability by the addition of smoothing factors to reduce the influence of measurement data errors. Beck [14] improved this technique by combining it with a sequential research of the solution. Other methods have been developed based on the data preconditioning [15].

The aim of the present work is to reconstruct the flux on a surface of a channel from collected flux within the flow. We show that with a convenient choice of solution space, this ill-posed problem can be reduced to a well-posed one. We consider an incompressible Newtonian fluid flowing between two plane slabs (*figure 1*). The dynamical regime is considered already established and the axial diffusivity is neglected. In order to solve the inverse problem (1)–(2), an asymptotic technique [18, 19] coupled with an optimisation method is proposed. First, equation (1) is rewritten with respect to flux variable (equation (3)) and perturbed with a small parameter ε (equation (4)). The solution of equation (3) is then sought as an infinite series of the increasing pow-

ers of ε . Equalling the terms of equal power in ε leads to equation (6). Since this problem is linear with respect to each function q_k , we separate the spatial variables x and y by means of equalities (7). Substituting these relations into equation (6) leads to equations (8) and (9). Setting $\varepsilon = 1$, the solution of the original problem (3) can be expressed as an infinite series of the successive derivatives of the unknown excitation. The base functions ψ_k are analytically evaluated using the recursive relation (8). It is fundamental to remark that no entrance condition has been used to find the expression of flux. Moreover, we have shown by cutting out the infinite series (13) at order two that the corresponding approximate function is close to the exact solution of (3). But this operation produced a systematic bias on the measurements. However, in practice, we established by estimating its truncating error, that the series (13) can be reduced to three terms. We show that the unknown excitation, the first and the second derivatives are sufficient for recovering the external flux with a good accuracy (*figures 5 and 6*). By using the finite difference approximation of equation (16), one obtains the linear system (17) which is very ill-conditioned (*figure 2*). To overcome this difficulty we introduce a qualitative constraint to transform the ill-posed problem (17) in a well posed one. Then, a quasi-solution [21] is found by solving the optimisation problem (20) on a compact set (23)–(24) with a gradient method [20] (*figure 3*). We present on *figures 5–7* two estimated excitations obtained with 40 measurements in the medium of a canal of depth $H = 1$ cm. For the computations, the solution of the direct problem has been perturbed by a Gaussian noise (*figure 4*) of different levels generated from the transformation method [22]. The numerical results show the accuracy of our approach. The asymptotic method used in this work allowed choosing efficiently the best location to collect measurements. We have shown that the unknown flux could be retrieved with a good accuracy despite of bias and noise measurement.